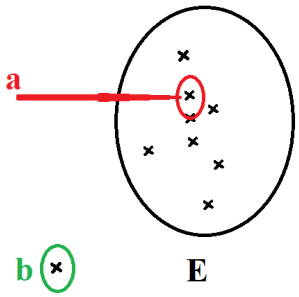
Chapitre 1 : Rappels et Préliminaires

HDHIRI I.

Definition

Un ensemble est une collection d'objets. Chacun de ces objet est dit élément de l'ensemble.
Si un élément a fait partie d'un ensemble E, on dira que a appartient à E, ou E contient a, et on notera $a \in E$

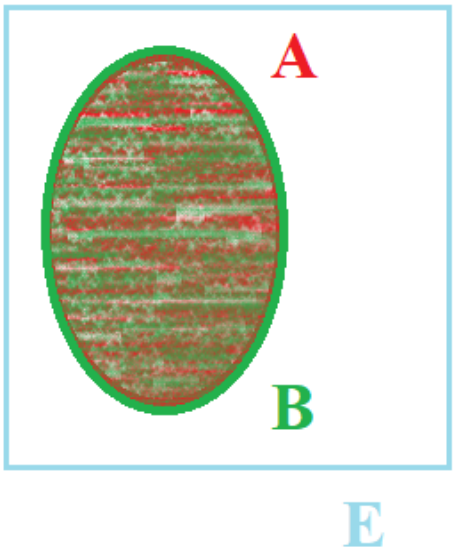


Si b n'appartient pas à E, on notera $b \notin E$

Definition

On dit que deux ensembles A et B sont égaux et on note $A = B$ si les éléments de A et B sont les mêmes. C'est-à-dire

$$\forall x; \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$$



Définition des ensembles

Les ensembles peuvent être définis de plusieurs manières :

- **Définition en extension** : En énumérant les éléments qui le constituent. Par exemple :$A = \{1, 2, 3, 4\}$ est un ensemble constitué des 4 éléments 1, 2, 3 et 4.
  L'ordre et la répétition des éléments n'ont aucune importance dans la définition de l'ensemble.
- **Définition en compréhension** : on s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété. Par exemple
  - $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} \;\; n = 2k\}$ est l'ensemble des entiers pairs.
  - $\{x \in \mathbb{R} | Re(z) = 0\}$ est l'ensemble des imaginaires purs.

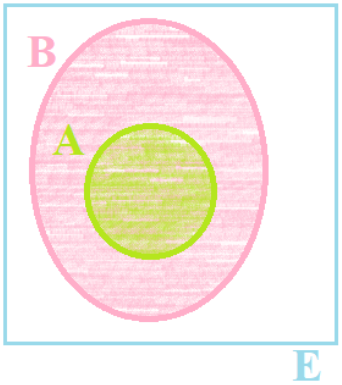
Quelques ensembles particuliers

- Ensemble vide : L'ensemble ne contenant aucun élément élément. On le note $\emptyset$
- Singleton : C'est un ensemble qui contient un seul élément. Si l'élément est a, on notera le singleton associé $\{a\}$

Inclusion

Definition

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B (ou que A est un sous-ensemble de B, ou encore une partie de B) et on note $A \subset B$ ssi tous les éléments de A appartiennent à B càd
$\forall x \in A; \quad x \in B$



Il suffit de trouver un seul élément x de A qui n'appartient pas à B pour dire que A n'est pas inclus dans B ($A \not\subset B$).

Exemple

- $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{0, 1, 2, 3, 4\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Remarque

- *A ne pas confondre l'appartenance qui est une relation entre un élément et un ensemble et l'inclusion qui est une relation entre deux ensembles.*
  Par exemple, on aura $a \in \{a, b, c\}$ *mais* $\{a\} \subset \{a, b, c\}$.
- *Les éléments d'un ensemble peuvent être eux mêmes des ensembles. Par exemple :* $\{\{1\},\ \{1, 2\}\}$

Example

- $\{1\} \subset \{1, 2\}$
- $1 \in \{1, 2\}$
- $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$ (il s'agit ici d'un ensemble d'ensembles)
- $\emptyset \subset \{1, 2\}$

Proposition

Soient A, B et C des ensembles.

- $\emptyset \subset A$
- $A \subset A$
- $A = B$ *ssi* $A \subset B$ *et* $B \subset A$
- *principe de double inclusion :* $A \subset B$ *et* $B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

Exemple

Nous cherchons à démontrer que $\mathbb{R}^+ = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Nous procédons par double inclusion :

$\mathbb{R}^+ \subset \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$: *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$. x *peut s'écrire* $x = \sqrt{x}^2$, *avec* $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. *D'ou* $x \in \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^+$: *Soit* $x \in \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. *Il existe un réel* y *tel que* $x = y^2$. *On a donc* $x \geq 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$.

Definition (Ensemble des parties)

À partir d'un ensemble E, on peut construire un nouvel ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$ constitué de l'ensemble des sous-ensembles de E.

En particulier, on a donc $A \in \mathcal{P}(E)$ ssi $A \subset E$.

Exemple

L'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$ *est*

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

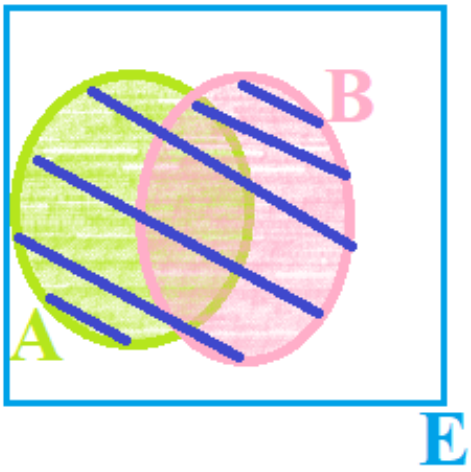
Opérations sur les ensembles

Soit E un ensemble, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$.

Definition (Union)

On définit l' union de A et B comme

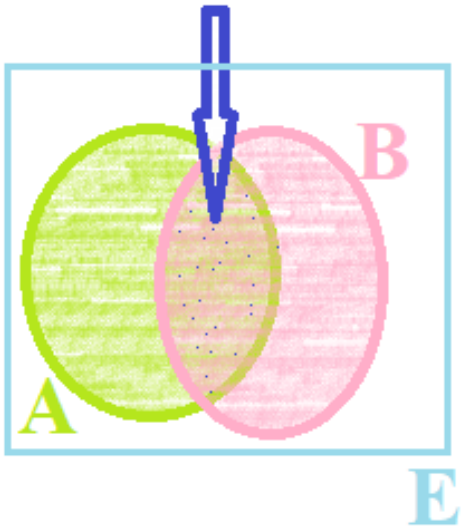
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \tag{1}$$



Definition (Intersection)

On définit l' intersection de A et B comme

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\} \tag{2}$$



Proposition

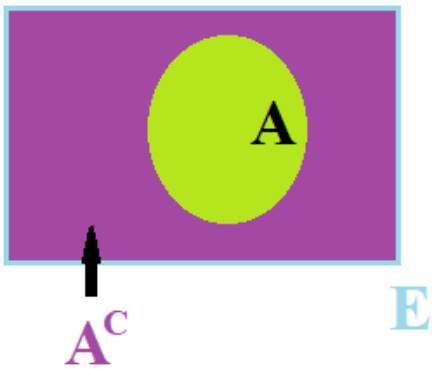
Soient E un ensemble, et A, B et C des parties de E.

- $A \cap B \subset A$
- $A \subset A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativité)*
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité)*
- $A \cup \emptyset = A$ *($\emptyset$ est l'élément neutre de $\cup$)*
- $A \cap E = A$ *(E est l'élément neutre de $\cap$)*
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$)*
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$)*

Definition (Complémentaire)

On définit le complémentaire de A dans E comme

$$A^C = {}^{C_E}A = \{x \in E | x \notin A\} \tag{3}$$



Exemple

Notons $2\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers pairs, et* $2\mathbb{N}+1$ *l'ensemble des entiers impairs.*

- $2\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N}+1 = \mathbb{N}$
- $2\mathbb{N} \cap 2\mathbb{N}+1 = \emptyset$
- $(2\mathbb{N})^C = 2\mathbb{N}+1$

Proposition

Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. On a

1. $(A^C)^C = A$
2. $A \cup A^C = E$
3. $A \cap A^C = \emptyset$
4. $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$ *(loi de Morgan)*
5. $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ *(loi de Morgan)*

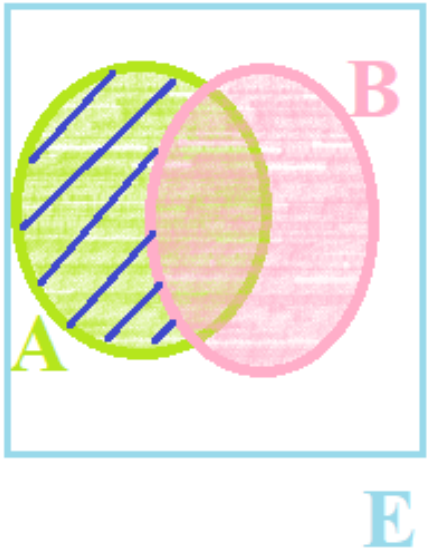
demonstration

1. $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in (A^C)^C$ par définition du complémentaire.
2. soit $x \in E$. On a soit $x \in A$, soit $x \notin A$ i.e. $x \in A^C$. D'où $A \cup A^C = E$.
3. Supposons l'existence d'un x dans l'intersection. On a alors $x \in A$ et $x \notin A$, ce qui est absurde.
   - Soit $x \in A^C \cup B^C$.
     Soit $x \in A^C$, et donc $x \notin A$. En particulier, comme $A \cap B \subset A$, $x \notin A \cap B$ et $x \in (A \cap B)^C$.
     Soit $x \in A^C$, et on conclut de même.
   - Soit $x \in (A \cap B)^C$. $x \notin A \cap B$. Donc soit $x \notin A$, soit $x \notin B$ (soit les deux).
     Dans le premier cas, $x \in A^C$, et dans le second $x \in A^C$. Donc $x \in A^C \cup B^C$.
4. Ce cas se traite de la même manière que le précédent.

Definition (Différence)

On définit la différence de A et B comme l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B.

$$A \backslash B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \notin B\} \tag{4}$$



Definition (Différence symétrique)

On définit la différence symétrique de A et B comme l'ensemble des éléments qui appartiennent uniquement à l'un des ensembles A ou B

$$A\Delta B = \{x \in E | (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\}. \quad (5)$$

Proposition

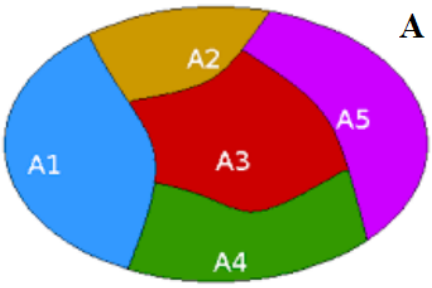
Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. On a :

- $A \backslash B = A \cap B^C$
- $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
- $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

partition

Soit $A \subset E$. On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties non vides de E forme une partition de A si

- les A_i sont disjoints : $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$
- les A_i forment un recouvrement de A : $A = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$



Produits d'ensembles

Definition (Ensemble produit)

On appelle ensemble produit ou produit cartésien de deux ensembles A et B l'ensemble $A \times B$ des couples (x, y) avec $x \in A$, $y \in B$:
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$
avec la convention $A \times B = \emptyset$ si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Attention, l'ordre des éléments dans le couple est important : $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Exemple

Soit $A = \{1, 5\}$, *et* $B = \{1, 2, 3\}$.
Alors, $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$.

Exercice

Montrer que $E \times F = F \times E$ ssi $E = F$ ou $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

Solution

Le sens réciproque est trivial.
Supposons $E \times F = F \times E$ et qu'aucun des ensembles ne soit vide.
Soit $x \in E$. Soit un élément $y \in F$ quelconque. On a
$(x, y) \in E \times F = F \times E$. On en déduit en particulier que $x \in F$.
D'où $E \subset F$. De même $F \subset E$.

Definition (Puissance d'un ensemble)

On notera $A^2 = A \times A$.
Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera
$A^n = (((A \times A) \cdots \times A)$.

Un élément de A^n sera noté $(a_1, \ldots, a_n)$, et on dira qu'il s'agit d'un n-uplet.

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

Definition (Application injective)

f est dite injective ssi $\forall (x, x') \in E^2 \;\; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Autrement dit, chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f.

Definition (Application Surjective)

f est dite surjective ssi $\forall y \in F \;\; \exists x \in E \;\; f(x) = y$.
Autrement dit, chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent par f.

Definition (Application Bijective)

f est dite bijective ssi elle est injective et surjective.

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit **l'indicatrice** de A par : $\forall x \in E$,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

- $1_{A^c} = 1 - 1_A$
- $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$
- $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$

Image directe d'un ensemble

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
On définit l'image réciproque d'une partie A de E par

Definition

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \;\; f(x) = y\}$$

On vient de construire une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$.

Proposition

Une application $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est surjective ssi $f(E) = F$.

Proposition

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. *On a*

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Pour le deuxième point, on a égalité lorsque f est injective.
Preuve : en exercice

image réciproque d'un ensemble

Definition

On définit l'image réciproque de B par l'application f comme suit

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. *On a :*

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$.

Preuve : en exercice

Definition

Le cardinal d'un ensemble est le nombre de ses éléments. Si l'ensemble est infini on dira que son cardinal est aussi infini. Soit E un ensemble. Le cardinal de E est noté $card(A)$ ou $\sharp E$ encore $|E|$.

Exemple : Si $E = \{2, 4, 5, 9\}$ **alors** $card(E) = 4$

Proposition

Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et
$card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$

Proposition

Soit E et F deux ensembles finis. Alors le produit cartésien $E \times F$ est fini et
$card(E \times F) = card(E).card(F)$.

Definition

Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$.

Proposition

1. *Tout sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*
2. *Tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable.*
3. *Le produit catésien d'ensembles dénombrables est également dénombrable*
4. *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est également dénombrable*

Proposition

Soit E un ensemble fini, de cardinal n. Soit $p \leq n$. Notons $\mathcal{P}_p(E)$ les parties à p éléments de E. Alors $\mathcal{P}_p(E)$ est fini et de cardinal $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. On note cet entier $\binom{n}{p}$ ou C_n^p. Il est dit coefficient binomial.

Proposition

Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et de cardinal $2^{card(E)}$.

Tribus

Dans toute la suite, E désignera un ensemble non vide.

Définition

(Définition 1) Une famille $\mathcal{A}$ de parties de E est dite tribu sur E si elle vérifie :

1. $E \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ *(stabilité par passage au complémentaire)*
3. *Pour toute famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ (une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ reste dans $\mathcal{A}$)*

On dit que $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et si $A \in \mathcal{A}$, on dit que A est $\mathcal{A}-$mesurable.

Proposition

Si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- *Soient $\mathcal{A}$ une tribu et $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$ (Stabilité par intersection dénombrable).*

Démonstration.

On note pour tout n, $B_n = A_n^c$. Donc, par définition d'une tribu, $B_n \in \mathcal{A}, \forall n$ et $\bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{n\geq 0} A_n &= \bigcap_{n\geq 0} B_n^c \\ &= \left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right)^c \\ &\in \mathcal{A}\ . \end{aligned}$$

Exemple

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$ *est une tribu.*
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ *est une tribu.*
- *Si* $E = \{1, 2, 3\}$, *alors* $\{\emptyset,\ \{1, 2\},\ \{3\},\ E\}$ *est une tribu.*

Par conséquent, Définition 1 peut être remplacée par la suivante :

Définition

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de E est une tribu si elle vérifie

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. *Pour toute famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a*

$$\cap_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$$

Remarque

Une intersection quelconque de tribus est une tribu.

En particulier si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, alors l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ reste une tribu. C'est même la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ dans le sens de la proposition suivante :

Proposition

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, il existe une tribu notée $\sigma(\mathcal{C})$ telle que si $\mathcal{B}$ est une tribu vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$.
On dira que $\sigma(\mathcal{C})$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Exemple

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ alors la tribu engendrée par $\{A\}$ est $\{\emptyset, A, A^C, E\}$.

Définition

Soit l'ensemble de parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *suivant :*

$$\mathcal{A} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\}$$

(c'est l'ensemble des intervalles ouverts). La tribu $\sigma(\mathcal{A})$ *s'appelle la tribu des boréliens et se note* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Les éléments de cette tribu sont appelés parties boréliennes ou un boréliens.

Exemple

Soit $[a, b]$ *intervalle fermé de* $\mathbb{R}$. *Les intervalles* $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$ *sont dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *La famille* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est une tribu donc* $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(stabilité par réunion dénombrable), et donc aussi* $(]-\infty, a[\cup]b, +\infty[)^c = [a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(stabilité par passage au complémentaire).*
De même, on peut montrer que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ *sont dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *ainsi que tous les singletons.*

Proposition

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par l'une quelconque des classes suivantes :

$$(i)\ \mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty[;\ a \in \mathbb{Q}\}$$
$$(ii)\ \mathcal{C}_2 = \{]a, +\infty];\ a \in \mathbb{Q}\}$$
$$(iii)\ \mathcal{C}_3 = \{]-\infty, b[;\ b \in \mathbb{Q}\}$$
$$(iv)\ \mathcal{C}_4 = \{]-\infty, b];\ b \in \mathbb{Q}\}$$

Fonctions mesurables

Définition

Soient $(E, \mathcal{A})$, $(E', \mathcal{A}')$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* $f : E \to E'$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *si*

$$\forall B \in \mathcal{A}',\ f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

.

Autrement dit, $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$.

Proposition

- *Toute fonction continue* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ *est mesurable.*
- *Si* f *et* g *sont des fonction mesurables* $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *alors* $f + g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ *sont mesurables.*
- *Si* $f : (E, \mathcal{A}) \to (E', \mathcal{A}')$ *est mesurable et* $g : (E', \mathcal{A}') \to (E'', \mathcal{A}'')$ *est mesurable alors* $g \circ f : (E, \mathcal{A}) \to (E'', \mathcal{A}'')$ *est mesurable.*

Mesure

On adoptera les conventions suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \infty = +\infty$, $0 \times \infty = 0$.

Définition

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure (positive) sur $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui vérifie :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *si $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ et sont deux à deux disjoints alors $\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$ ($\sigma -$ additivité).*

- Si $\mu(E) < \infty$, on dit que μ est une mesure finie.
- Si $\mu(E) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité .

Définition

On dit que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exemple

Le triplet $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), Card)$, où $Card(A) =$ le nombre d'éléments de A, est un espace mesuré. On a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. De plus :

1. *Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $Card(A)$ est bien dans $[0, +\infty]$.*
2. *La partie $\emptyset$ est de cardinal 0.*
3. *Si $A_0, A_1, \cdots \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont deux à deux disjoints,*

$$Card(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} Card(A_n).$$

Proposition

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $B \subset A$.

- *Alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.*
- *Si, de plus $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$,*

où $\backslash$ désigne la différence.

Démonstration.

On a $\mu(A) = \mu(A \backslash B) + \mu(B)$ (car $A \backslash B$ et B sont disjoints). Donc $\mu(B) \leq \mu(A)$. Si $\mu(A) < +\infty$, nous avons alors

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B).$$

□

- Pour $A, B \in \mathcal{A}$ quelconques, on a $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

Proposition

Sous-additivité.
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Si* $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ *(pas forcément deux à deux disjoints). Alors* $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$.

Démonstration.

On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $k \geq 1$, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{0\leq i\leq k-1} A_i$. Les ensembles $B_0, B_1, B_2, \ldots$ sont deux à deux disjoints. Nous avons

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \mu(\bigcup_{n\geq 0} B_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(B_n) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$$

La dernière inégalité provient du fait que $\forall n$, $B_n \subset A_n$. □

limite croissante de la mesure

Proposition

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $A_0, A_1, \ldots$ *une famille croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$*, i.e.,*
$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ *. Alors*

$$\mu(\bigcup_{k\geq 0} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration.

Posons $B_0 = A_0$ et pour tout $k \geq 1$, $B_k = A_k \backslash A_{k-1}$. Les ensembles $B_0, B_1, B_2, \ldots$ sont deux à deux disjoints. Donc

$$\begin{aligned} \mu(\underset{k\geq 0}{\cup} A_k) &= \mu(\underset{k\geq 0}{\cup} B_k) = \sum_{k\geq 0} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k). \end{aligned}$$

On a $\forall n$, $\sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \mu(A_n)$. Donc $\mu(\underset{k\geq 0}{\cup} A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Limite décroissante de la mesure

Proposition

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $A_0, A_1, \ldots$ *une famille décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ $(A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots)$ *qui vérifie* $\mu(A_0) < +\infty$. *Alors*

$$\mu(\bigcap_{k\geq 0} A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Démonstration.

Posons pour tout k, $B_k = A_k \backslash A_{k+1}$. Les ensembles $B_0, B_1, B_2, \ldots$ sont deux à deux disjoints.
Nous avons $\bigcap_{k\geq 0} A_k = A_0 \backslash \bigcup_{k\geq 0} B_k$, donc

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{k\geq 0} A_k) &= \mu(A_0) - \mu(\bigcup_{k\geq 0} B_k) \\
&= \mu(A_0) - \sum_{k\geq 0} \mu(B_k) \\
&= \mu(A_0) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\mu(A_0) - \mu(B_0) - \cdots - \mu(B_n)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\mu(A_0) - \mu(\bigcup_{0\leq k\leq n} B_k)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n+1}) \ .
\end{aligned}$$

Mesure de Lebesgue

Theorem

Il existe une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant

1. *pour tout intervalle* $]a, b[$, $\lambda(]a, b[) = b - a$
2. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{y : y - x \in A\}) = \lambda(A)$.

Cette mesure λ s'appelle la mesure de Lebesgue.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, ona $\lambda(\{x\}) = 0$.
   En effet, $\forall n \geq 1$, $\{x\} \subset [x - 1/n, x + 1/n]$. Donc $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x - 1/n, x + 1/n]) = 2/n \to_{n\to\infty} 0$.
2. Soient $a \leq b$ des éléments de $\mathbb{R}$. Nous avons
$$\lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = b - a.$$
3. Pour tout D denombrable, on a $\lambda(D) = 0$.

Chapitre 3 : Integrales des fonctions mésurables LFMa3

HDHIRI I.

Dans toute la suite, on se placera sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Fonction indicatrice

Definition

Soit $A \subset E$. La fonction indicatrice de A est la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{1}_A & : & E & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A\ . \end{cases} \end{array}$$

Lemma

Si $A \subset E$, $B \subset E$ alors $\forall x$,

- $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x)$.
- $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

Intégrales des fonctions étagées positives.

Definition

Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On dit que f est étagée (positive) s'il existe une famille finie $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{A}$ telle que

- les A_i forment une partition de E (ce qui veut dire que $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$)
- $\forall i \in \{1, \ldots n\}$, $\exists a_i \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $f(x) = a_i$, $\forall x \in A_i$.

Autrement dit,

$$f = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

Remarque

On peut trouver une autre partition $B_1, \ldots, B_m$ telle que $f = \sum_{1 \leq i \leq m} a_i \mathbf{1}_{B_i}$.

Example

La fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est une fonction positive étagée ($\lfloor x \rfloor$ signifie « partie entière »). En effet, elle est constante sur $]-\infty, 0[$, $[0,1[$, $[1,2[$, $\{2\}$, $]2,+\infty[$. Avec des fonctions indicatrice, nous pouvons écrire f de manière plus compacte :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \mathbf{1}_{[0,2]}(x) = \mathbf{1}_{[0,2[}(x) \times \lfloor x \rfloor + 2 \times \mathbf{1}_{\{2\}}(x) = \dots \ .$$

Intégrale !d'une fonction étagée positive

Definition

Soit f une fonction positive étagée associée à une partition $A_1, \ldots, A_n$ ($f = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$).

- On appelle intégrale de f par rapport à μ le nombre suivant

$$I(f) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \ .$$

  Ce nombre est noté $\int_E f(x)\mu(dx)$ ou encore $\int_E f d\mu$.
- Une fonction positive étagée f est dite intégrable si

$$\int_E f d\mu < +\infty.$$

Remarque

La valeur de $\int_E f(x)\mu(dx)$ *est indépendante de la partition associée à* f.

Lemma

Toute fonction mesurable positive f est limite simple d'une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions mesurables positives étagées.

Démonstration.

Il suffit de considérer la suite :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2n}, & \text{si } \frac{k}{2n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2n};\ k = 0, 1, \ldots n2^n - 1 \\ n, & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

□

Intégrale d'une fonction mesurable positive

Definition

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f : E \to [0, +\infty]$ est mesurable (par rapport aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) positive, l'intégrale de f sur E par rapport à la mesure μ est définie par

$$\int_E f(x)\mu(dx) := \sup_{\phi \in \mathcal{E}(f)} \int_E \phi(x)\mu(dx)$$

où $\mathcal{E}(f) := \{\phi \text{ étagée positive} : \phi(x) \leq f(x), \forall x \in E\}$. Cette intégrale peut prendre sa valeur dans $[0, +\infty]$.
Pour $B \in \mathcal{A}$, on note

$$\int_B f(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_B(x)\mu(dx) \ .$$

Fonction intégrable

Definition

Une fonction mesurable positive f est dite intégrable si

$$\int_E f(x)\mu(dx) < \infty.$$

Croissance de l'intégrale

Proposition

Soient f, g deux fonctions positives mesurables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \leq g$ (ce qui veut dire $f(x) \leq g(x), \forall x$) alors $\int_E f(x)\mu(dx) \leq \int_E g(x)\mu(dx)$.

Démonstration.

Nous avons $\mathcal{E}(f) \subset \mathcal{E}(g)$ car $f \leq g$. Donc

$$\sup_{\phi \in \mathcal{E}(f)} \int_E \phi(x)\mu(dx) \leq \sup_{\phi \in \mathcal{E}(g)} \int_E \phi(x)\mu(dx) \ .$$

□

Théorème de comparaison

Théorème

Soient f, g deux fonctions positives mesurables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Si $f \leq g$ et g est intégrable alors f est également intégrable.

Densité

Definition

Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la mesure μ admet pour densité la fonction $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ (par rapport à λ) si pour toute fonction mesurable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)\lambda(dx) \ .$$

Ceci implique, en particulier, que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(B) = \int_B f(x)\lambda(dx) \ .$$

Linéarité de l'intégrale

Théorème

Soit f, g deux fonctions positives mesurables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $a \geq 0$, alors :

$$\int_E f(x) + g(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mu(dx) + \int_E g(x)\mu(dx)$$

et

$$\int_E af(x)\mu(dx) = a\int_E f(x)\mu(dx) \ .$$

En particulier, si f et g sont intégables alors tel est le cas pour $f + g$.

Inégalité de Markov

Théorème

Soient f une fonction positive mesurable et $a > 0$. Alors :

$$\mu(\{x \in E : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f(x)\mu(dx) \ .$$

Démonstration.

On pose $\{f \geq a\} = \{x \in E : f(x) \geq a\}$ On a $a\mathbf{1}_{\{f \geq a\}} \leq f$ donc par théorème de comparaison :

$$\int_E a\mathbf{1}_{\{f \geq a\}}(x)\mu(dx) \quad \leq \quad \int_E f(x)\mu(dx) \ .$$

La fonction $a\mathbf{1}_{\{f \geq a\}}$ est une fonction étagée et on calcule son intégrale :

$$\int_E a\mathbf{1}_{\{f \geq a\}}(x)\mu(dx) = a \times \mu(\{f \geq a\}) + 0 \times \mu(\{f \geq a\}) \ .$$

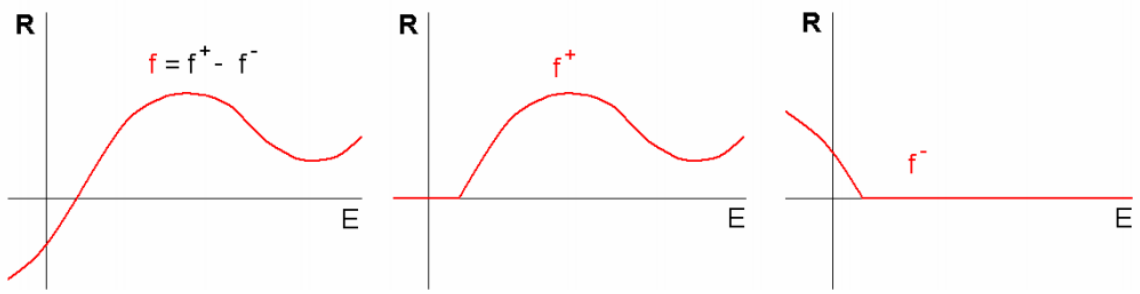
D'où le résultat. □

Toute application mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme :$f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- mesurables positives :

$$f^+(x) = max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(x) = max(-f(x), 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple de partie positive et négative d'une fonction



$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $\qquad$ $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$

Il est facile à voir que

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Soit f une fonction mesurable.

Definition

- On dit que f admet une integrale par rapport à μ si $\int_E f^+(x)\mu(dx) < +\infty$ ou $\int_E f^-(x)\mu(dx) < +\infty$. On définit l'intégrale de f par

$$\int_E f(x)\mu(dx) := \int_E f^+(x)\mu(dx) - \int_E f^-(x)\mu(dx)$$

- La fonction f est dite $\mu-$intégrable si $|f|$ admet une integrale finie par rapport à μ, ou encore $\int_E f^+(x)\mu(dx) < +\infty$ et $\int_E f^-(x)\mu(dx) < +\infty$

$\forall A \in \mathcal{A}$, on définit l'intégrale de f sur A par

$$\int_A f(x)\mu(dx) := \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\mu(dx) \ .$$

Lemma

Soit f une fonction intégrable. On a

$$\left|\int_E f(x)\mu(dx)\right| \leq \int_E |f(x)|\mu(dx)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f(x)\mu(dx)\right| &= \left|\int_E f^+(x)\mu(dx) - \int_E f^-(x)\mu(dx)\right| \\
&\leq \left|\int_E f^+(x)\mu(dx)\right| + \left|\int_E f^-(x)\mu(dx)\right| \\
&= \int_E f^+(x)\mu(dx) + \int_E f^-(x)\mu(dx) \\
&= \int_E |f(x)|\mu(dx) \ .
\end{aligned}$$

□

Linéarité et croissance

Théorème

Soit f, g deux fonctions integrables et $a \geq 0$, alors :

$$\int_E f(x) + a\, g(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mu(dx) + a \int_E g(x)\mu(dx)$$

et si $f \leq g$, alors

$$\int_E f(x)\mu(dx) \leq \int_E g(x)\mu(dx) \ .$$

Ensembles négligeables

Definition

- Un élément A de $\mathcal{A}$ est dit $\mu-$négligeable si $\mu(A) = 0$.
- Une partie A de E est dite $\mu-$négligeable s'il existe une partie négligeable $N \in \mathcal{A}$ telle que $A \subset N$

Notation : La classe des parties negligeables ser notée $\mathcal{N}$.

Exemples :

1. Supposons que la tribu $\mathcal{A}$ contienne les singletons. Soit μ la mesure de Dirac au point $a \in E$. Un ensemble A est μ-négligeable si et seulement s'il ne contient pas a. L'ensemble $E \setminus \{a\}$ est donc μ-négligeable.
2. Si μ est la mesure nulle, toutes les parties de E sont négligeables ; cette mesure est clairement la seule pour laquelle E lui-même est négligeable.

Definition

- Une propriété $\mathcal{P}$ est dite vérifiée μ-presque partout si elle est vérifiée en dehors d'une partie μ-négligeable.
- Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Elle est dite μ-presque partout nulle si $\exists A \in \mathcal{A}$ négligeable tel que $x \in A^c \Rightarrow f(x) = 0$.

On pourra dire presque partout (p.p.) s'il n'y a pas risque de confusion ou presque sûrement en probabilité (p.s.).

Quelques Propriétés

1. $\emptyset$ est une partie négligeable pour toutes les mesures
2. Toutes les parties d'un ensemble négligeable sont négligeables
3. Une intersection quelconque de parties négligeables est négilgeable
4. Une réunion au plus dénombrable de parties négligeables est négilgeable
5. Si $f = f'$ $\mu-$p.p. et $g = g'$ $\mu-$p.p. alos $f + g = f' + g'$ $\mu-$p.p.
6. Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sont deux suite qui vérifient $f_n = g_n$ $\mu-$p.p. $\forall n$, alors $\sup_n f_n = \sup_n g_n$ $\mu-$p.p. et $\inf_n f_n = \inf_n g_n$ $\mu-$p.p. (il en est de même pour les limites sup et inf)
7. Si A et B sont deux parties $\mathcal{A}-$mesurables, on a $A\Delta B \in \mathcal{N}$ ssi $1_A = 1_B$ $\mu-$p.p.

Espace complet

Definition

- Un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui contient toutes les parties négligeables est appelé un espace mesuré complet.
- La tribu complétée de $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$

Remarque

La tribu complétée de $\mathcal{A}$ est égales à la classe

$$\{B \cup N;\ B \in \mathcal{A} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}.$$

Remarque

Si f est une fonction mesurable positive telle que $\exists A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$ et $f(x) = +\infty$ si $x \in A$, alors $\int_E f(x)\mu(dx) = +\infty$.

Démonstration.

La fonction $\phi(x) = +\infty \times \mathbf{1}_A(x)$ est une fonction étagée vérifiant $\phi \leq f$, $\int_E \phi(x)\mu(dx) = +\infty$. D'où $\int_E f(x)\mu(dx) = +\infty$ par la définition ci-dessus.
Nous avons donc que si $\int_E f(x)\mu(dx) < +\infty$ alors il n'existe pas d'ensemble A ayant les propriétés ci-dessus, ce qui veut donc dire que f est finie presque partout. □

Théorème

Soit f une fonction mesurable positive. f est p.p. nulle ssi $\int_E f(x)\mu(dx) = 0$.

Remarque

Si f est de signe quelconque, alors le sens direct est vrai mais pas le sens réciproque.

Démonstration

- Si f est p.p. nulle alors $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et f est nulle sur A^c. Soit $\phi \in \mathcal{E}(f)$ et $B_1, \ldots, B_p$ partition associée à ϕ. On note $B'_i = B_i \cap A$ et $B''_i = B_i \cap A^c$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Les ensembles $B'_1, \ldots, B'_p, B''_1, \ldots, B''_p$ sont deux à deux disjoints et ϕ est constante sur chacun d'entre eux. Pour $x \in B'_i$, on note $\phi(x) = c_i$. Pour tout x dans $B''_1, \ldots, B''_p$, $f(x) = 0$. Pour tout $i \in \{1, \ldots p\}$, $\mu(B'_i) \leq \mu(A)$ donc $\mu(B'_i) = 0$. Ainsi

$$\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0 \times \mu(B''_1) + \cdots + 0 \times \mu(B''_p) + c_1 \times \mu(B'_1) + \cdots + c_p \times \mu(B'_p) = 0$$

Cela est vrai pout toute $\phi \in \mathcal{E}(f)$ donc $\int_E f(x)\mu(dx) = 0$.

- Si $f \geq 0$ et $\int_E f(x)\mu(dx) = 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \{f \geq \varepsilon\}$. f étant mesurable alors $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$.
  Maintenant, soit ϕ la fonction étagée définie par :
  $$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A_\varepsilon^c \\ \varepsilon & \text{si } x \in A_\varepsilon \end{cases}.$$
  On a pour tout x, $\phi(x) \leq f(x)$ donc
  $$0 \leq \int_E \phi(x)\mu(dx) \leq \int_E f(x)\mu(dx)$$
  donc $\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0$. Par ailleurs,
  $$\int_E \phi(x)\mu(dx) = 0 \times \mu(A_\varepsilon^c) + \varepsilon \times \mu(A_\varepsilon)$$
  donc $\mu(A_\varepsilon) = 0$. La famille $(A_{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc par la limite croissante de la mesure, on a
  $\mu(\{f > 0\}) = \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\geq+\infty} \mu(A_{\frac{1}{n}}) = 0$. Donc f est nulle p.p.

Intégrale sur un ensemble négligeable

Théorème

Soit $A \in \mathcal{A}$ négligeable et $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. On a

$$\int_A f(x)\mu(dx) = 0 \ ,$$

Démonstration.

On a

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mathbf{1}_A(x)\mu(dx) \ .$$

Donc par le théorème précédent, $\int_A f(x)\mu(dx) = 0$. □

Proposition

Soit $f, g : E \to \mathbb{R}$ mesurables qui admettent des intégrales. On suppose que $f = g$ $\mu-$p.p. si $x \notin A$. Alors

$$\int_E f(x)\mu(dx) = \int_E g(x)\mu(dx) \ .$$

Démonstration.

La fonction $f - g$ est nulle presque partout donc, par le théorème précédent $\int_E (f(x) - g(x))\mu(dx) = 0$.
Maintenant, par linéarité de l'intégrale, on a :
$\int_E f(x)\mu(dx) - \int_E g(x)\mu(dx) = \int_E (f(x) - g(x))\mu(dx) = 0.$ □

Exemple

Exemple

Espace complet

Théorème

Il existe une mesure ν sur la tribu complétée $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ telle que :

- *si $A \in \mathcal{A}$ alors $\mu(A) = \nu(A)$*
- *Les parties négligeables pour μ sont également négligeables pour ν.*

La mesure ν est appelée mesure complétée de μ.

Chapitre 4 : Théorèmes limites LFMa3

HDHIRI I.

Dans toute la suite, on se placera sur un espace mesuré complet $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Ceci implique en particulier que toutes les parties négligeables appartiennent à $\mathcal{A}$ et que si deux fonctions sont égales $\mu-$p.p., alors il suffit que l'une soit mesurable pour que la deuxième le soit.

Definition

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}$.

- On dit que (f_n) convergence presque sûrement vers f (et on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} f$) s'il existe N négligeable tel que $\forall x \in N^C,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.
- On dit que (f_n) convergence simplement vers f si $\forall x \in E$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Remarque

La convergence simple implique la convergence presque sûre.

Proposition

Si on a une suite (f_n) de fonctions $E \to [0, +\infty[$ mesurables (positives) telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} f$ alors f est mesurable.

Démonstration.

Il existe N négligeable tel que $\forall x \in N^C,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. On pose pour tout $x \in E$; $\widetilde{f}(x) = f(x)1_{N^C}(x)$ et $\widetilde{f}_n(x) = f_n(x)1_{N^C}(x);\ n \in \mathbb{N}$.
La suite $(\widetilde{f}_n)$ converge simplement vers $\widetilde{f}$ et il est facile à voir que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\widetilde{f}_n$ est mesurable, alors $\widetilde{f}$ est mesurable et il en est de même pour f. □

Théorème de convergence monotone

Théorème

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant presque sûrement vers une fonction f. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mu(dx) \ .$$

Démonstration.

La suite $(\int_E f_n(x)\mu(dx))$ étant croissante alors elle admet une limite $l \in [0, +\infty]$. On veut montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\alpha \int_E f(x)\mu(dx) \leq l \leq \int_E f(x)\mu(dx).$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et pour tout n, $A_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha f(x)\}$. On a pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \geq f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)$ donc

$$\int_E f_n(x)\mu(dx) \geq \int_E f_n(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\mu(dx) = \int_{A_n} f_n(x)\mu(dx) \geq \alpha \int_{A_n} f(x)\mu(dx) \tag{1}$$

□

Montrons que

$$\int_{A_n} f(x)\mu(dx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f(x)\mu(dx) \ . \tag{2}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de l'intégrale, il existe une fonction étagée ϕ telle que $\phi \leq f$,
$\int_E \phi(x)\mu(dx) \geq \int_E f(x)\mu(dx) - \varepsilon$. Nous avons également :

$$\int_E \mathbf{1}_{A_n}(x)\phi(x)\mu(dx) \leq \int_E f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\mu(dx) \leq \int_E f(x)\mu(dx) \ . \tag{3}$$

La fonction ϕ étant étagée, alors il existe une partition $B_1, \ldots, B_p \in \mathcal{A}$ de E et $b_1, \ldots, b_p \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\phi(x) = \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \mathbf{1}_{B_i}(x) \ .$$

Alors $\forall n$, $\phi \mathbf{1}_{A_n}$ est une fonction étagée qui se décompose en

$$\phi(x)\mathbf{1}_{A_n}(x) = 0 \times \mathbf{1}_{A_n^c}(x) + \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \mathbf{1}_{B_i \cap A_n}(x) \ .$$

Et donc

$$\int_E \phi(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\mu(dx) = 0 \times \mu(A_n^c) + \sum_{1 \leq i \leq p} b_i \times \mu(B_i \cap A_n) \quad (4)$$

Pour tout n, nous avons $A_n \subset A_{n+1}$ et donc $\forall i$, $B_i \cap A_n \subset B_i \cap A_{n+1}$. Par la propriété de convergence croissante de la mesure,

On remarque que $\cup_{n\geq 0} A_n = \{x \in E : \exists n, f_n(x) \geq \alpha f(x)\} \supset \{x \in E : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\}$. Donc
$\{x \in E : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\}^c \supset (\cup_{n\geq 0} A_n)^c$. Donc
$0 = \mu(\{x \in E : f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)\}^c) \geq \mu((\cup_{n\geq 0} A_n)^c)$. Donc
$\mu((\cup_{n\geq 0} A_n)^c) = 0$, $\mu(B_i \cap (\cup_{n\geq 0} A_n)^c) \leq \mu((\cup_{n\geq 0} A_n)^c) = 0$. Puis
$\mu(B_i) = \mu(B_i \cap (\cup_{n\geq 0} A_n)^c) + \mu(B_i \cap (\cup_{n\geq 0} A_n))$ donc
$\mu(B_i) = \mu(B_i \cap \cup_{n\geq 0} A_n)$. On déduit donc de (4) et (5)

$$\int_E \phi(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\mu(dx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{1\leq i\leq p} b_i \times \mu(B_i) = \int_E \phi(x)\mu(dx) \ .$$

Donc par (3) et en utilisant la définition de ϕ

$$\begin{aligned} \int_E f(x)\mu(dx) - \varepsilon &\leq \int_E \phi(x)\mu(dx) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_E \phi(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)dx \\ &\leq \liminf \int_E f(x)\mu(dx) \end{aligned}$$

Par (1), nous avons :

$$I \geq \alpha \int_E f(x)\mu(dx) \ . \tag{6}$$

Pour presque tout x, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} f(x)$ donc $f_n(x) \leq f(x)$. Soit $\forall n$, $\bar{f}_n$ définie par

$$\bar{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } f_n(x) \leq f(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et $\bar{f}_n$ sont égales presque partout donc leurs intégrales sont égales. La fonction $\bar{f}_n$ vérifie $\bar{f}_n(x) \leq f(x)$ $(\forall x)$ donc en particulier

$$\int_E f_n(x)\mu(dx) = \int_E \bar{f}_n(x)\mu(dx) \leq \int_E f(x)\mu(dx) \ .$$

Donc

$$\int_E f(x)\mu(dx) \geq I \ .$$

Et comme l 'équation (6) est vraie pour tout $\alpha \in]0,1[$, ceci finit la démonstration.

Lemme de Fatou

Théorème

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$$

Démonstration.

On pose $f = \liminf_{n\to+\infty}$, on a f est mesurable positive et

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right)$$

On pose pour tout n, $\inf_{k\geq n} f_k(x)$. La suite (g_n) est croissante donc d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E g_n d\mu. \tag{7}$$

D'autre part, on a $\forall k \geq n$, $\int_E g_n d\mu \leq \int_E f_k d\mu$. Donc

$$\int_E g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n}\int_E f_k d\mu$$

En tenant compte de l'inégalité précédante et par passage à la limite dans (7) on obtient :

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mu(dx) \geq \int_E f(x)\mu(dx)\ .$$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue (T.C.D.)

Théorème

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables sur* E *qui vérifie :*

- *il existe* g *positive intégrable telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)\ \mu-p.p.$
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} f$

alors

- $\int_E |f(x)|\mu(dx) < \infty$
- $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\mu(dx) = 0$.

Démonstration.

Il existent $N_1,\ N_2 \in \mathcal{N}$ tels que f_n converge vers f dans N_1^C et $|f_n| \leq g$ dans N_2^C. On pose $\widetilde{f} = f1_{N_1^C \cap N_2^C}$ et $\widetilde{f_n} = f_n 1_{N_1^C \cap N_2^C}$; $n \in \mathbb{N}$. On a $f = \widetilde{f}$ $\mu-$p.p. et $f_n = \widetilde{f_n}$ $\mu-$p.p. et $(\widetilde{f_n})$ converge simplement vers $\widetilde{f}$. Nous avons alors pour tout x, $|\widetilde{f}(x)| \leq g(x)$, donc $\int_E |f(x)|\mu(dx) = \int_E |\widetilde{f}(x)|\mu(dx) < \infty$.
Maintenant, on pose pour tout x, $h_n(x) = 2g(x) - |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f_n}(x)| \geq 0$. On a
$\liminf_{n\to+\infty}(2g(x) - |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f_n}(x)|) = 2g(x)$ donc par le lemme de Fatou

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E (2g(x) - |f(x) - f_n(x)|)\mu(dx) = \liminf_{n\to+\infty} \int_E h_n(x)\mu(dx) \quad \geq \quad \int_E 2g(x)\mu(dx) \ .$$

Or par linéarité de l'intégrale,

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E (2g(x) - |f(x) - f_n(x)|)\mu(dx) = \int_E 2g(x)\mu(dx) - \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) \ .$$

Ce qui implique que $0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) = 0$
Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) = 0 \ .$$

Notons que le T.C.D. implique en particulier que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mu(dx) = \int_E f(x)\mu(dx)\ .$$

En effet,

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n(x)\mu(dx) - \int_E f(x)\mu(dx)\right| &= \left|\int_E f(x) - f_n(x)\mu(dx)\right| \\ &\leq \int_E |f(x) - f_n(x)|\mu(dx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .\end{aligned}$$

Exemple

$E = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu = \lambda$.
On cherche à calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 e^{-nx^2} dx.$$

On appliquant le T.C.D. à la suite
$f_n(x) = nx^2 e^{-nx^2} 1_{[0,1]}(x)$; $n \in \mathbb{N}$ qui converge vers 0 et qui vérifie $f_n \leq 1_{[0,1]}$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 e^{-nx^2} dx. = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^2 e^{-nx^2} dx = 0.$$

Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on cherche à étudier la régularité de la fonction

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u, x)\lambda(dx).$$

Continuité sous le signe intégrale

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

(i) $\forall u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(u,x)$ *est mesurable*

(ii) $\exists u_\infty$ *tel que pour presque tout* x, $u \mapsto f(u,x)$ *est continue en* u_∞

(iii) $\exists g$ *positive intégrable telle que* $\forall u \in \mathbb{R}$, $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction F *définie par* $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u,x)\lambda(dx)$ *est définie en tout point* $u \in \mathbb{R}$ *et est continue en* u_∞.

Démonstration.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers u_∞. On cherche à montrer que $F(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(u_\infty)$. Posons $\forall n$, $f_n(x) = f(u_n, x)$. Nous avons $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} h$ avec $h(x) := f(u_\infty, x)$ par (ii). En vertue de (i), Les fonctions f_n sont mesurables. Par (iii), nous avons $\forall n$, $\forall x$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ avec g intégrable. Donc par le théorème de convergence dominée, on a :

$$F(u_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(dx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} h(x)\lambda(dx) = F(u_\infty) \ .$$

□

Théorème de continuité « globale »sous l'intégrale

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall u \in I$, $x \mapsto f(u,x)$ *est mesurable*

(ii) *pour presque tout x, $u \mapsto f(u,x)$ est continue sur I*

(iii) $\exists g$ *positive intégrable telle que* $\forall u \in I$ *et pour presque tout x,* $|f(u,x)| \leq g(x)$.

Alors la fonction F définie par $F(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u,x)\lambda(dx)$ est définie et continue en tout point $u \in I$.

Convolution

Example

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée par M et continue. On définit la convolée de f et ϕ par :

$$u \mapsto (f \star \phi)(u) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u-x) f(x) \lambda(dx)$$

Notons $h(u,x) = \phi(u-x)f(x)$. Pour tout x, $u \mapsto h(u,x)$ est continue. Pour tout u, $|h(u,x)| \leq M|f(x)|$. La fonction $x \mapsto \phi(u-x)f(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Donc par le théorème de continuité globale, $f \star \phi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation sous l'intégrale

Théorème

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $u_\infty \in I$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\forall u \in I$, $x \mapsto f(u,x)$ *est intégrable*
- (ii) *pour presque tout* x, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)$ *existe*
- (iii) $\exists g$ *positive intégrable telle que* $\forall u \in I$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(u,x) - f(u_\infty, x)| \leq g(x)|u - u_\infty|$.

Alors $F(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u,x)\lambda(dx)$ *existe pour tout* $u \in I$ *et est dérivable en* u_∞. *De plus*

$$F'(u_\infty) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\lambda(dx) \ .$$

Démonstration.

L'existence de F est assurée par (i).
En ce qui concerne la dérivation, il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ convergeant vers u_∞ avec $\forall n$, $u_n \neq u_\infty$, $\frac{F(u_n)-F(u_\infty)}{u_n-u_\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\lambda(dx)$. Prenons donc une telle suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Posons $\forall n$

$$\phi_n(x) = \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty} .$$

Par (ii), $\phi_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, .)$. Par (iii), nous avons pour p.t. x, $|\phi_n(x)| \leq g(x)$. Donc par théorème de convergence dominée,

$$\frac{F(u_n) - F(u_\infty)}{u_n - u_\infty} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u_n, x) - f(u_\infty, x)}{u_n - u_\infty}\lambda(dx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u_\infty, x)\lambda(dx) .$$

□

Dérivation « globale »sous le signe intégral

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- (i) $\exists u_0 \in I,\ x \mapsto f(u_0, x)$ *est intégrable*
- (ii) *pour p.t.* x, $u \mapsto f(u, x)$ *est dérivable sur* I
- (iii) $\forall x, \forall u, \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\right| \leq g(x)$ *avec* g *intégrable .*

Alors $F(u) := \int_{\mathbb{R}} f(u, x)\lambda(dx)$ *existe et est dérivable sur* I*. De plus*

$$F'(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\lambda(dx) \ .$$

Démonstration.

On a pour tout $u \in I$,

$$\begin{aligned} |f(u,x)| &\leq |f(u_0,x)| + |f(u,x) - f(u_0,x)| \\ &\leq |f(u_0,x)| + |u-u_0| \sup_{v\in[u,u_0]} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(v,x)\right| \\ &\leq f(u_0,x)| + |u-u_0| g(x) \ . \end{aligned}$$

Donc, par (i) et (iii), F est bien définie. Pour tous $u, u_\infty \in I$, pour tout x,

$$\begin{aligned} |f(u,x) - f(u_\infty,x)| &\leq |u-u_\infty| \sup_{v\in[u,u_0]} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(v,x)\right| \\ &\leq g(x)|u-u_\infty| \end{aligned}$$

par (iii). Et le théorème précécent finit la démonstration.

Exemple

Soit, pour $u > 0$, $F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t} dt$.
La fonction $t \mapsto e^{-1\times t} \times \frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $\left| e^{-1\times t} \times \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq e^{-t}$.
Pour tout $t > 0$, $u \mapsto e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{-ut} \times \frac{\sin(t)}{t}\right) = -e^{-ut}\sin(t)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $u > \varepsilon$, $|-e^{-ut}\sin(t)| \leq e^{-\varepsilon t}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc par théorème de dérivation globale, nous avons pour $u > \varepsilon$

$$F'(u) = \int_0^{+\infty} -e^{-ut}\sin(t)dt \ .$$

Cela est vrai $\forall \varepsilon > 0$ donc $\forall u > 0$, $F'(u) = \int_0^{+\infty} -e^{-ut}\sin(t)dt$.

$$\begin{aligned} F'(u) &= \left[e^{-ut}\cos(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ue^{-ut}\cos(t)dt \\ &= -1 + \left[ue^{-ut}\sin(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u^2e^{-ut}\sin(t)dt \\ &= -1 - u^2F'(u)\ . \end{aligned}$$

Donc $F'(u) = \frac{-1}{1+u^2}$. Par suite, $\exists C \in \mathbb{R}\,;\ F(u) = C - \arctan(u)$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \exp(-nt)\frac{\sin(t)}{t}$. Les fonctions f_n sont mesurables. Pour tout $t > 0$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|f_n(t)| \leq e^{-t} \times 1$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc, par T.C.D.,
$F(n) = \int f_n(t)\mu(dt) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous avons $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$ donc $C = \frac{\pi}{2}$ et

$$F(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan(u)\ .$$

On se donne deux espaces mesurés $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(E', \mathcal{A}', \mu')$.
Les résultat de cette section restent vrais si l'on a d espaces mesurés $(E_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$; $i = 1, ..., d$. Les démonstration seront fournies dans l'annexe.

Tribu produit

Definition

On définit sur l'ensemble $E \times E'$, la tribu produit notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ comme étant la plus petite tribu contenant tous les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}'$.

Mesure produit

Théorème

Il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \mu'$ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ telle que, si $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$, $\mu \otimes \mu'(A \times B) = \mu(A)\mu'(B)$. La mesure $\mu \otimes \mu'$ s'appelle la mesure produit de μ et μ'

Proposition

On a : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ *(produit d fois). La mesure* $\lambda \otimes \lambda$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *mesure les aires, la mesure* $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda = \lambda^{\otimes 3}$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ *mesure les volumes, . . .*

Théorème de Fubini-Tonelli

Théorème

Soit $f : E \times E' \to [0, +\infty]$ *mesurable positive. On définit les fonctions* ϕ *et* ψ *sur* E *et* E' *respectivement par*

$$\phi(x) = \int_{E'} f(x,y)\mu'(dy), \ \psi(y) = \int_E f(x,y)\mu(dx) \ .$$

Ces fonctions sont mesurables positives et vérifient

$$\int_E \phi(x)\mu(dx) = \int_{E\times E'} f(x,y)\mu \otimes \mu'(dx,dy) = \int_{E'} \psi(y)\mu'(dy)$$

(et cette quantité $\in [0, +\infty]$*).*

Théorème de Fubini

Théorème

Soit $f : E \times E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *une fonction mesurable. On définit les fonction* f_1 *et* f_2 *sur* E *et* E' *respectivement par*

$$f_1(x) = \int_{E'} |f(x,y)|\mu'(dy), \;\; f_2(y) = \int_E |f(x,y)|\mu(dx) \; .$$

(i) *Si* f_1 *ou* f_2 *est intégrable alors l'autre l'est également et dans ce cas,*

$$\int_E \phi(x)\mu(dx) = \int_{E\times E'} f(x,y)\mu\otimes\mu'(dx,dy) = \int_{E'} \psi(y)\mu'(dy) \; . \; (\star)$$

(ii) *Si* f *est* $\mu \otimes \mu'$*-intégrable alors* f_1 *est* μ*-intégrable et* f_2 *est* μ'*-intégrable et* $(\star)$ *est vérifiée*

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{x+y\leq 1} \ . \end{array}$$

Cette fonction est mesurable positive. Par Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\lambda\otimes\lambda(dx,dy) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{x+y\leq 1}dx\right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^1 e^{-x}\mathbf{1}_{x+y\leq 1}dx\right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^{1-y} e^{-x}dx\right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y}\left(1-e^{-(1-y)}\right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y}-e^{-1}dy = 1-2e^{-1}. \end{aligned}$$

Notation

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrable, on notera indifféremment

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)\lambda^{\otimes d}(dx_1,\dots,dx_d) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)dx_1\dots dx_d \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1,\dots,x_d)dx_1\dots dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)du\end{aligned}$$

Mesure à densité

Definition

Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. La mesure μ est dite avoir pour densité la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ (par rapport à $\lambda^{\otimes d}$) si $\forall \phi \ : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)f(x)\lambda^{\otimes d}(dx) \ .$$

Ceci implique, en particulier, que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mu(B) = \int_B f(x)\lambda(dx) \ .$$

Interversion de somme et d'intégrale

Example

Soit $f : E \times E' \to \mathbb{R}^+$ mesurable positive. Nous supposons dans cet exemple que $(E', \mathcal{A}', \mu') = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{card})$. On peut montrer que, pour toute fonction g positive sur E',

$$\int_{E'} g(x)\mu'(dx) = \sum_{k \geq 0} g(k) \ .$$

Par Fubini-Tonelli, nous avons alors

$$\int_E \left(\sum_{k \geq 0} f(x,k) \right) \mu(dx) = \sum_{k \geq 0} \left(\int_E f(x,k)\mu(dx) \right) \ .$$

Definition

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Un difféomorphisme de U dans V est une bijection $\phi : U \to V$ telle que ϕ et ϕ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$, càd, $\phi_1, \ldots, \phi_d$ sont continues et $\forall i, j$, $\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}$ existe et est continue. La matrice jacobienne de ϕ est donnée par :

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_1}(u_1, \ldots, u_d) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_2}(u_1, \ldots, u_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u_d}(u_1, \ldots, u_d) & \ldots & \frac{\partial \phi_d}{\partial u_d}(u_1, \ldots, u_d) \end{bmatrix}$$

Théorème de changement de variable.

Théorème

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\phi : U \to V$ un difféomorphisme et f une fonction $V \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors la fonction $f \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ est intégrable et on a :

$$\int_V f(y)dy = \int_U (f \circ \phi)(x) \times |\det(J_\phi(x))|dx$$

Example : coordonnées polaires

Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi \quad : \quad]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (\rho,\theta) & \to & (\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) \ . \end{array}$$

L'application ϕ est un difféormorphisme de matrice jacobienne :

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

Nous avons $|\det J_\phi|(\rho,\theta) = |\rho|$. Donc, par le théorème précédant :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}|\rho|d\theta d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \ . \end{aligned}$$